

SOME REMARKS ON AVELLA-ALAMINOS-GEISS INVARIANTS OF GENTLE ALGEBRAS

HIROYUKI NAKAOKA (中岡 宏行)

ABSTRACT. This is a report on the talk given at the *51st Symposium on Ring Theory and Representation Theory* 2018. We recall how the original definition of Avella-Alaminos–Geiss invariants can be rephrased by using blossoming, following the article by Asashiba. These are derived invariants calculable combinatorially from their bound quivers. Ladkani has given a formula which describes the dimensions of the Hochschild cohomologies of a gentle algebra in terms of its Avella-Alaminos–Geiss invariants.

In the latter part we introduce a ‘repetitive’ construction of gentle algebras out of a gentle algebra in a similar manner as that of the usual repetitive algebras. We show how the Avella-Alaminos–Geiss invariants of the resulting algebras are related to those of the original one.

1. GENTLE ALGEBRA の AVELLA-ALAMINOS-GEISS 不変量

早速, gentle 代数の Avella-Alaminos–Geiss 不変量の定義を述べたい. 浅芝先生による [2] (英訳は [3]) ではオリジナル [4] の定義を分かりやすく言い換えてあるので, 主にこれに従う. 置換の作用をより前面に押し出した Bobiński による記述 [5] も参考にする. この記事を通じ, 代数という代数閉体 K 上有限次元のものとする.

まずは gentle 代数に対し, 以下の操作を行う. [2] では特に名付けられていないが, 後に [9] や [7] で再発見されており, [9] では blossoming, [7] では fringing という名称で呼ばれている.

Definition 1. (Q, I) を gentle bound quiver とする. このとき, 以下を満たす gentle bound quiver $(\bar{Q}, \bar{I})$ が得られる.

- (1) (Q, I) は $(\bar{Q}, \bar{I})$ の bound subquiver である.
- (2) 任意の $v \in Q_0$ に対し, $\bar{Q}$ における入次数と出次数はともに 2 である.
- (3) 任意の $v \in \bar{Q}_0 \setminus Q_0$ は, 出次数が 1 のソースか, 入次数が 1 のシンクである.

この $(\bar{Q}, \bar{I})$ を [9] に倣い, (Q, I) の blossoming と呼ぶことにする.

定義から, $\bar{Q}_0 \setminus Q_0$ は二つの部分集合

$$E = \{v \in \bar{Q}_0 \setminus Q_0 \mid v \text{ はソース}\}, \quad F = \{v \in \bar{Q}_0 \setminus Q_0 \mid v \text{ はシンク}\}$$

の直和となる. また, 任意の $v \in E$ に対し $s(\rho) = v$ を満たす $(\bar{Q}, \bar{I})$ の極大パスが一意に存在し, $t(\rho) \in F$ となる. この対応により全単射 $\Psi: E \rightarrow F$ が得られる. 以降, 以下の記号を用いる.

- $E = \{s_1, \dots, s_d\}$ とおく.
- $F = \{t_1, \dots, t_d\}$ とおく. ここで, $\Psi(s_i) = t_i$ となるよう添え字付ける.

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.
講演の機会を下さいましたオーガナイザーの先生方に御礼申し上げます.

- s_i を始点とする唯一の矢を σ_i で表す.
- t_i を終点とする唯一の矢を τ_i で表す.

$\overline{Q}$ の矢の列 $\mathfrak{A} = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ であつて $t(\alpha_l) = s(\alpha_{l+1})$ かつ $\alpha_l \alpha_{l+1} \in I$ を任意の $1 \leq l < m$ で満たすものを, アンチパスと呼ぶ. その長さを通常のパスと同様, $\ell(\mathfrak{A}) = m$ とする. アンチパスがさらに $t(\alpha_m) = s(\alpha_1)$ かつ $\alpha_m \alpha_1 \in I$, そして任意の $1 \leq l < m$ に対し $t(\alpha_l) \neq s(\alpha_1)$ を満たすならば, これをアンチサイクルという.

$\overline{Q}$ のアンチパスのうち極大なものは必ず E の元から始まり F の元で終わることが分かる. 実際, 各 $1 \leq i \leq d$ に対し $\mathfrak{A}_i = \sigma_{\Phi(i)} \cdots \tau_i$ の形の極大アンチパスが存在し, この添え字の対応で $\{1, \dots, d\}$ の置換 $\Phi \in \mathfrak{S}_d$ が得られる. Φ の生成する巡回部分群 $\langle \Phi \rangle \leq \mathfrak{S}_d$ の $\{1, \dots, d\}$ への作用で, $\{1, \dots, d\} = \mathcal{O}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{O}_r$ と軌道分解し, それぞれの軌道 $\mathcal{O}$ の型を

$$\text{type}(\mathcal{O}) = \left(|\mathcal{O}|, \sum_{i \in \mathcal{O}} (\ell(\mathfrak{A}_i) - 2) \right)$$

と定める. 第2成分に現れる $\ell(\mathfrak{A}_i) - 2$ は, 極大アンチパス $\mathfrak{A}_i$ から矢 $\sigma_{\Phi(i)}$ と τ_i を除いたものの長さである. これを用いて, 以下の様に定める.

Definition 2. (Q, I) を gentle bound quiver とする. $(q, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対し, $\phi_A(q, l) \in \mathbb{N}$ を以下で定める.

$$\phi_A(q, l) = \begin{cases} |\{\text{長さ } l \text{ のアンチサイクル}\}| & q = 0 \text{ のとき} \\ |\{\text{型 } (q, l) \text{ の軌道}\}| & q > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

こうして定まる関数 $\phi_A: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を $A = KQ/I$ の Avella-Alaminos–Geiss 不変量という.

[4] において, この ϕ_A が A の導来不変量であることが示された. ([12] により, gentle 代数のクラスは導来同値で閉じていることに注意.) 既存の不変量との関係として, Ladkani [8] による以下の式は, Hochschild コホモロジーの次元を Avella-Alaminos–Geiss 不変量で記述している. 詳細な証明は [11] で見ることができる.

- $\dim_K \text{HH}^0(A) = 1 + \phi_A(1, 0)$.
- $\dim_K \text{HH}^1(A) = 1 - \chi(Q) + \phi_A(1, 1) + \begin{cases} \phi_A(0, 1) & \text{if } \text{char} K = 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

ここで $\chi(Q)$ は Q の無向グラフとしてのオイラー数であり, 次の様にも表せる.

$$\chi(Q) = \frac{1}{2} \sum_{(q, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \phi_A(q, l)(q - l).$$

- $n \geq 2$ では,

$$\dim_K \text{HH}^n(A) = \phi_A(1, n) + a_n \sum_{d|n} \phi_A(0, d) + b_n \sum_{d|(n-1)} \phi_A(0, d)$$

となる. ただし,

$$(a_n, b_n) = \begin{cases} (1, 0) & \text{if } \text{char} K \neq 2 \text{ and } n \text{ is even,} \\ (0, 1) & \text{if } \text{char} K \neq 2 \text{ and } n \text{ is odd,} \\ (1, 1) & \text{if } \text{char} K = 2 \end{cases}$$

とする.

上式中に現れる Avella-Alaminos–Geiss 不変量は主に $\phi_A(0, l)$ と $\phi_A(1, l)$ である一方, $\chi(Q)$ の表示を除き $q \geq 2$ なる $\phi_A(q, l)$ が現れないことが観察される. このため, 「 $\phi_A(q, l)$ ($q \geq 2$) も何らかのコホモロジー的な意味を持つか」という問が生じる. これに答えるため, 次の操作を考える.

2. 有限回 GENTLE REPETITION

Definition 3. k を正の整数とする. (Q, I) を gentle bound quiver とする. 以下の4ステップで得られる gentle bound quiver $(Q^{(k)}, I^{(k)})$ を, (Q, I) の k -回 gentle repetition と呼ぶことにする.

Step 1. (Q, I) の blossoming $(\bar{Q}, \bar{I})$ をとる.

Step 2. 各 $1 \leq i \leq k$ に対し, $(\bar{Q}, \bar{I})$ のコピーを用意し, $(\bar{Q}^{[i]}, \bar{I}^{[i]})$ とおく. 直和して, bound quiver

$$(\mathcal{P}, J) := \coprod_{1 \leq i \leq k} (\bar{Q}^{[i]}, \bar{I}^{[i]}) = \left(\coprod_{1 \leq i \leq k} \bar{Q}^{[i]}, \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \bar{I}^{[i]} \right)$$

を得る. 対応するコピーの元 (頂点や矢, パスなど) には上付き添え字 $^{[i]}$ を付すことにする.

Step 3. $(\mathcal{P}, J)$ を以下の様に修正し, gentle bound quiver $(\mathcal{P}', J')$ を得る.

- (i) 任意の $1 \leq i < k$ および $1 \leq p \leq d$ に対し, 新たな矢 $\varpi_p^{[i]}$ を $s(\varpi_p^{[i]}) = s(\tau_p^{[i]})$, $t(\varpi_p^{[i]}) = t(\sigma_p^{[i+1]})$ となるよう $\mathcal{P}$ に付け加える. その後, 矢 $\tau_p^{[i]}, \sigma_p^{[i+1]}$ と頂点 $t_p^{[i]}, s_p^{[i+1]}$ を取り除く. $\mathfrak{C} = \{\varpi_p^{[i]} \mid 1 \leq i < k, 1 \leq p \leq d\}$ とおく.
- (ii) 任意の $\xi, \xi' \in \mathcal{P}_1' \setminus \mathfrak{C}$ および $\varpi_p^{[i]}, \varpi_{p'}^{[i']} \in \mathfrak{C}$ に対し以下の様に定めることで, relation J' を定義する.

$$\begin{aligned} \xi \varpi_p^{[i]} \in J' &\Leftrightarrow \xi \tau_p^{[i]} \in J, & \varpi_p^{[i]} \xi \in J' &\Leftrightarrow \sigma_p^{[i+1]} \xi \in J, \\ \xi \xi' \in J' &\Leftrightarrow \xi \xi' \in J, & \varpi_p^{[i]} \varpi_{p'}^{[i']} \in J' &\Leftrightarrow \sigma_p^{[i+1]} \tau_{p'}^{[i']} \in J. \end{aligned}$$

Step 4. $(\mathcal{P}', J')$ から, 頂点 $s_p^{[1]}, t_p^{[k]}$ と矢 $\sigma_p^{[1]}, \tau_p^{[k]}$ を全ての $1 \leq p \leq d$ で取り除き, $(Q^{(k)}, I^{(k)})$ を得る.

このように定義すると, $A^{(k)} = KQ^{(k)}/I^{(k)}$ の Avella-Alaminos–Geiss 不変量は以下の通り求まる.

Proposition 4. 次が成り立つ.

- (1) 任意の $(n, m) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}$ に対し,

$$S_{(k)}(n, m) = \{(q, l) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N} \mid (n, m) = \left(\frac{L}{k}, \frac{L}{q}l + \frac{L}{k}(k-1)\right), L = \text{lcm}(q, k)\}$$

とおくと,

$$\phi_{A^{(k)}}(n, m) = \sum_{(q, l) \in S_{(k)}(n, m)} \gcd(q, k) \phi_A(q, l)$$

が成立する.

(2) 任意の $l \in \mathbb{N}_{>0}$ に対し,

$$\phi_{A^{(k)}}(0, l) = k\phi_A(0, l)$$

が成立する.

メビウスの反転公式を適用することで, 以下の様に, 前節末尾の間へのある程度の回答が得られる.

Corollary 5. 任意の $(q, l) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}$ に対し, $d = \gcd(q, l)$ とおくととき,

$$(2.1) \quad \phi_A(q, l) = \frac{1}{q} \sum_{c|d} \mu(c) \phi_{A(\frac{q}{c})} \left(1, \frac{q+l}{c} - 1\right)$$

が成り立つ. ただし μ は通常 of メビウス関数を表す.

特に, アンチサイクルが無く, $(q, l) \in (\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}) \setminus \{(1, 1)\}$ かつ q, l が互いに素ならば

$$\phi_A(q, l) = \frac{1}{q} \dim \mathrm{HH}^{q+l-1}(A^{(q)})$$

となることが従う.

有限回 gentle repetition と, [6] で用いられている一般 Auslander-Platzek-Reiten reflection は以下の様に関係する.

Proposition 6. $A = KQ/I$ を gentle 代数とする. 以下の条件 (c1), (c2), (c3) を満たす頂点 $x \in Q_0$ に関し一般 Auslander-Platzek-Reiten reflection を施し得られる gentle 代数を $B = KQ'/I'$ とおく.

- (c1) $s(\alpha) = t(\alpha) = x$ を満たす $\alpha \in Q_1$ は存在しない.
- (c2) Q において, x の入次数と出次数はともに 2 である.
- (c3) $t(\beta) = x$ を満たす任意の $\beta \in Q_1$ に対し, $t(\gamma) = s(\beta)$ かつ $\gamma\beta \in I$ なる $\gamma \in Q_1$ が存在する.

このとき, 任意の正の整数 k に対し, $B^{(k)}$ は $A^{(k)}$ に一般 Auslander-Platzek-Reiten reflection を k 回施して得られる.

命題 4 で見たように, $A^{(k)}$ の Avella-Alaminos-Geiss 不変量は A の Avella-Alaminos-Geiss 不変量を用いて記述できる. このことから, ある程度の条件下では有限回 gentle repetition が導来同値を保つのではないかと予想することができる.

3. 導来同値に関する部分的結果

導来同値の構成に傾複体を用いるため, まずは $A^{(k)}$ をより明示的に代数と加群の言葉で表したい. まずは, 以下の様な代数 $V(A)$ を A に付随させる.

Proposition 7. 任意の gentle 代数 $A = KQ/I$ に対し, 半単純代数 $V(A)$ と K -代数の単射準同型 $\eta_A: A \rightarrow V(A)$ であって, $E = \mathrm{Cok} \eta_A$ が両側 A 加群として以下を満たすものが存在する. ただし $DA = \mathrm{Hom}_K(A, K)$ は A の標準的 K -双対を表し, $\{\xi^\bullet \in DA \mid \xi \in A \text{ はパス}\}$ をその双対基底とする.

- $\mathrm{Cok} \eta_A$ には K 上の基底 $\{\xi^\dagger \mid \xi \in A \text{ はパス}\}$ が存在し, 次の (1), (2) を満たす.
 - (1) A の任意のパス ξ に対し $\xi^\dagger \in e_{t(\xi)} E e_{s(\xi)}$ である.
 - (2) 任意のパスの組 $\theta, \xi \in A$ で $\ell(\theta) > 0$ なるものに対し, $\theta\xi^\dagger \in E$ は以下を満たす. $\xi^\dagger\theta$ についても同様.

- DA において $\theta\xi^\bullet = 0$ となることと, E において $\theta\xi^\dagger = 0$ となることは同値.
- もし $\ell(\theta) < \ell(\xi)$ ならば, パス $\omega \in A$ に対し $\theta\xi^\bullet = \omega^\bullet$ が DA で成立することと, $\theta\xi^\dagger = \omega^\dagger$ が E で成立することは同値.
- もし $\ell(\theta) = \ell(\xi)$ ならば, $\theta\xi^\bullet = e_a^\bullet$ が DA において成り立つことと, ある $C \in K \setminus \{0\}$ が存在し E において $\theta\xi^\dagger = Ce_a^\dagger$ が成り立つことは同値.

さらに, $\text{char}K \neq 2$ で A が条件

- A のどの極大パス ρ に対しても, $s(\rho) = s(\alpha)$ かつ $t(\rho) = t(\alpha)$ を満たすような, ρ と異なる矢 α は存在しない.

を満たすならば, $\eta_A: A \rightarrow V(A)$ は上記の性質で同型を除き一意に特徴付けられる.

詳細は省略するが, 現在の方法では実際に $V(A)$ を明示的に全行列環の直積として構成し, K 上の具体的な基底に関する地道な議論で命題7を証明している. $V(A)$ を用いると, $A^{(k)}$ を以下の様に変現することができる. この命題も, 実際に基底の対応を与え, K -代数の同型となることを愚直に示し証明を与えている.

Proposition 8. A を η_A の像と同一視し, $V(A)$ の部分代数とみなす. そうして得られる全行列環 $M_k(V(A))$ の部分代数

$$\begin{bmatrix} A & V(A) & V(A) & \cdots & V(A) \\ 0 & A & V(A) & \cdots & V(A) \\ 0 & 0 & A & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & V(A) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A \end{bmatrix}$$

は $A^{(k)}$ と同型になる.

命題8により, 通常の repetitive algebra の場合の議論 ([1]) を真似て, A 上の傾複体 (定義等は [10] を参照) $T^\bullet \in K^b(\text{proj}A)$ から $A^{(k)}$ 上の傾複体 $\tilde{T}^\bullet \in K^b(\text{proj}A^{(k)})$ を構成することができ, 以下が得られる.

Theorem 9. $\text{char}K \neq 2$ とする. A, B を導来同値な gentle 代数とし, 傾複体 $T^\bullet$ が同型 $\text{End}_{K^b(\text{proj}A)}(T^\bullet) \cong B$ を与えるとする. もし A, B が条件

- (i) 両側 A -加群としての同型 $\text{Cok}\eta_A \cong DA$ が存在する.
- (ii) B のどの極大パス ρ に対しても, $s(\rho) = s(\alpha)$ かつ $t(\rho) = t(\alpha)$ を満たすような ρ と異なる矢 α は存在しない.

を満たすならば, 傾複体 $\tilde{T}^\bullet$ により $A^{(k)}$ と $B^{(k)}$ の間の導来同値が得られる.

この条件 (i) は非常に制限的であるが, 現在の証明では標準的 K -双対 DA に対する [1] の結果を用いていることもあり, 現状では欠かせない条件となっている.

REFERENCES

- [1] Asashiba, H.: *A covering technique for derived equivalence*. J. Algebra **191** (1997), no. 1, 382–415.
- [2] 浅芝秀人: 多元環の導来同値分類. 『数学』 **64** (2012), no. 4, 357–383.
- [3] Asashiba, H.: *Derived equivalence classification of algebras*. Sugaku Expositions **29** (2016), no. 2, 145–175.

- [4] Avella-Alaminos, D.; Geiss, C.: *Combinatorial derived invariants for gentle algebras*. J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), no. 1, 228–243.
- [5] Bobiński, G.: *Derived equivalence classification of the gentle two-cycle algebras*. Algebr. Represent. Theory **20** (2017), no. 4, 857–869.
- [6] Bobiński, G.; Malicki, P.: *On derived equivalence classification of gentle two-cycle algebras*. Colloq. Math. **112** (2008), no. 1, 33–72.
- [7] Brüstle, T.; Douville, G.; Mousavand, K.; Thomas, H.; Yıldırım, E.: *On the combinatorics of gentle algebras*. arXiv:1707.07665
- [8] Ladkani, S.: *Hochschild cohomology of gentle algebras*. Algebr. Represent. arXiv:1208.2230.
- [9] Palu, Y.; Pilaud, V.; Plamondon, P.-G.: *Non-kissing complexes and τ -tilting for gentle algebras*, arXiv:1707.07574.
- [10] Rickard, J.: *Derived categories and stable equivalence*. J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), no. 3, 303–317.
- [11] Redondo, M.J.; Román, L.: *Gerstenhaber algebra structure on the Hochschild cohomology of quadratic string algebras*. Algebr. Represent. Theory **21** (2018), no. 1, 61–86.
- [12] Schröer, J.; Zimmermann, A.: *Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras*. Math. Z. **244** (2003), no. 3, 515–530.

RESEARCH AND EDUCATION ASSEMBLY
 SCIENCE AND ENGINEERING AREA
 RESEARCH FIELD IN SCIENCE
 KAGOSHIMA UNIVERSITY
 1-21-35 KORIMOTO, KAGOSHIMA, 890-0065 JAPAN
E-mail address: nakaoka@sci.kagoshima-u.ac.jp